Tuesday, 15 July 2025

Problem 1. A line in the plane is called *sunny* if it is **not** parallel to any of the x-axis, the y-axis, and the line $x + y = 0$.

Let $n \geqslant 3$ be a given integer. Determine all nonnegative integers k such that there exist n distinct lines in the plane satisfying both of the following:

- for all positive integers a and b with $a + b \leqslant n + 1$, the point (a, b) is on at least one of the lines; and
- exactly k of the n lines are sunny.

Problem 2. Let Ω and Γ be circles with centres M and N, respectively, such that the radius of Ω is less than the radius of Γ. Suppose circles Ω and Γ intersect at two distinct points A and B. Line MN intersects Ω at C and Γ at D, such that points C, M, N and D lie on the line in that order. Let P be the circumcentre of triangle ACD. Line AP intersects Ω again at $E \neq A$. Line AP intersects Γ again at $F \neq A$. Let H be the orthocentre of triangle PMN.

Prove that the line through H parallel to AP is tangent to the circumcircle of triangle BEF.

(The *orthocentre* of a triangle is the point of intersection of its altitudes.)

Problem 3. Let $\mathbb{N}$ denote the set of positive integers. A function $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is said to be *bonza* if

$$f(a) \text{ divides } b^a - f(b)^{f(a)}$$

for all positive integers a and b.

Determine the smallest real constant c such that $f(n) \leqslant cn$ for all bonza functions f and all positive integers n.

Thứ Ba, ngày 15 tháng 7 năm 2025

Bài 1. Một đường thẳng trong mặt phẳng tọa độ được gọi là *đường ánh nắng* nếu nó **không** song song với trục x, trục y hay đường thẳng $x + y = 0$.

Cho số nguyên dương $n \geqslant 3$ cố định. Xác định tất cả các số nguyên không âm k sao cho tồn tại n đường thẳng phân biệt trong mặt phẳng tọa độ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- Với mọi số nguyên dương a và b mà $a + b \leqslant n + 1$, điểm $(a; b)$ nằm trên ít nhất một trong n đường thẳng đó;
- Đúng k trong số n đường thẳng là đường ánh nắng.

Bài 2. Cho các đường tròn Ω và Γ có tâm tương ứng là M và N sao cho bán kính của Ω nhỏ hơn bán kính của Γ. Giả sử các đường tròn Ω và Γ cắt nhau tại các điểm phân biệt A và B. Đường thẳng MN cắt Ω tại điểm C và cắt Γ tại điểm D, sao cho thứ tự các điểm trên đường thẳng đó lần lượt là C, M, N và D. Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD. Đường thẳng AP cắt lại Ω tại điểm $E \neq A$. Đường thẳng AP cắt lại Γ tại điểm $F \neq A$. Gọi H là trực tâm của tam giác PMN.

Chứng minh rằng đường thẳng đi qua H và song song với AP tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF.

(*Trực tâm* của một tam giác là giao điểm của các đường cao của nó.)

Bài 3. Ký hiệu $\mathbb{Z}_{>0}$ là tập hợp các số nguyên dương. Một hàm số $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ được gọi là *tốt* nếu

$$b^a - f(b)^{f(a)} \text{ chia hết cho } f(a)$$

với mọi số nguyên dương a và b.

Xác định số thực c nhỏ nhất sao cho $f(n) \leqslant cn$ với mọi hàm số tốt f và mọi số nguyên dương n.